МУЛЬТИПОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СФЕРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

В.И. Литун, В.Н. Митрохин
(Москва, МГТУ имени Н.Э. Баумана, v.i.litun@gmail.com)

MULTIPOLE FORMULATION OF SPHERICAL RADIATOR'S ELECTROMAGNETIC WAVES

V.I. Litun, V.N. Mitrokhin

Задача восстановления ближнего поля источника электромагнитного излучения по известному (измеренному или полученному в результате компьютерного моделирования) полю в дальней зоне и обратная ей задача восстановления поля в дальней зоне по известному полю ближней являются актуальными и с теоретической, и с прикладной точек зрения. Их решение расширяет возможности измерений (корректное восстановление диаграммы направленности (ДН) тестируемой антенны по измерению полей в ближней зоне, дополнительные возможности учёта окружающих излучающий элемент объектов) и позволяет проводить синтез амплитудно-фазового распределения для апертурных и конформных антенных систем на основании требований к форме ДН.

Одним из методов решения описанных задач является представление известного на некотором сечении поля в виде совокупности собственных волн свободного пространства в сферическом базисе. В сочетании с концепцией критических сечений [1], позволяющих для каждого типа собственных волн учитывать границу ближней зоны, метод собственных волн носит название мультипольного или же разложения поля по мультиполям [2].

Подробно общее описание мультипольного метода и метода векторных сферических гармоник приведено в [2, 3]. Решение уравнений Максвелла в сферической системе координат r, θ, ϕ можно представить в виде суперпозиции электрических E_{mn}- и магнитных H_{mn}-типов волн, компоненты которых определяются через скалярные потенциальные функции U и V.

E_{mn}-типы волн:

$$H_r = 0;\ H_\theta = \frac{i\omega\varepsilon_a}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi};\ \mathrm{H}_\phi = -\frac{i\omega\varepsilon_a}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta};$$

$$\mathrm{E}_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U;\ E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\theta};\ \mathrm{E}_\phi = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\phi};$$

H_{mn}-типы волн:

$$E_r = 0;\ \mathrm{E}_\theta = \frac{i\omega\mu_a}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi};\ \mathrm{E}_\phi = -\frac{i\omega\mu_a}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta};$$

$$H_r = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + k^2 V;\ \mathrm{H}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\theta};\ \mathrm{H}_\phi = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\phi}.$$

При замене $U = ru$, $V = rv$, потенциалы Дебая u и v удовлетворяют уравнениям Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, $\Delta v + k^2 v = 0$. Используя фундаментальную систему уравнений, частные решения для потенциальной функции U и V принимают следующий вид:

$$\left.\begin{matrix} U_{mn} \\ V_{mn} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} AU_{mn} \\ AV_{mn} \end{matrix}\right. R_n(kr)\Theta_{mn}(\theta)\Phi_m(\phi),$$

где m и n - целые числа, включая нуль, AU_{mn} и AV_{mn} – константы, а

$$\Theta_{mn}(\theta)=P_n^m(\cos\theta);\quad \Phi_m(\phi)=\begin{cases}\sin(m\phi)\\ \cos(m\phi)\end{cases};$$

$$\mathrm{R}_n(kr)=kr\begin{cases}h_n^{(2)}\left[(kr)_{кр}\right]n_n(kr), kr\le(kr)_{кр}\\ n_n\left[(kr)_{кр}\right]h_n^{(2)}(kr), kr>(kr)_{кр}\end{cases},\ (kr)_{кр}=\sqrt{n(n+1)}. \tag{1}$$

В (1) $P_n^m(\cos\theta)$ – присоединённый полином Лежандра, $n_n(kr)$– сферическая функция Неймана , $h_n^{(2)}(kr)$ – сферическая функция Ханкеля 2–го рода. Сферические Бесселевы функции связаны с цилиндрическими следующим соотношением:

$$z_n(kr)=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}Z_{n+1/2}(kr),$$

где z - сферическая, а Z - цилиндрическая функции, соответственно.

Значения составляющих векторных компонентов разложения получаются из представления скалярных потенциалов сферических гармоник *mn*:

$$\vec{m}_{mn}^{\pm}=CE_{mn}\cdot\frac{R_n(kr)}{kr}\cdot\left\{\hat{e}_r\quad\hat{e}_\theta\quad\hat{e}_\phi\right\}\times\begin{Bmatrix}0\\ -\dfrac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\\ i\dfrac{d}{d\theta}\left(P_n^m(\cos\theta)\right)\end{Bmatrix}\cdot e^{\pm im\phi};$$

$$\vec{n}_{mn}^{\pm}=CE_{mn}\cdot\frac{1}{kr}\cdot\left\{\hat{e}_r\quad\hat{e}_\theta\quad\hat{e}_\phi\right\}\times\begin{Bmatrix}\dfrac{R_n(kr)}{kr}n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\\ \dfrac{dR_n(kr)}{d(kr)}\dfrac{d}{d\theta}\left(P_n^m(\cos\theta)\right)\\ -i\dfrac{dR_n(kr)}{d(kr)}\dfrac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\end{Bmatrix}\cdot e^{\pm im\phi};$$

причём $CE_{mn}=\left[\dfrac{1}{n(n+1)}\dfrac{2n+1}{4\pi}\dfrac{(n-m)!}{(n+m)!}\right]^{1/2}$, а

$$R_q(kr)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{kr}{\sqrt{q(q+1)}}}\begin{cases}H_{q+1/2}^{(2)}\left(\sqrt{q(q+1)}\right)N_{q+1/2}(kr),\ kr\le\sqrt{q(q+1)}\\ N_{q+1/2}\left(\sqrt{q(q+1)}\right)H_{q+1/2}^{(2)}(kr),\ kr>\sqrt{q(q+1)}\end{cases}$$

Таким образом, вектора электромагнитного поля на некотором сферическом сечении конечного радиуса имеют следующий вид:

$$\vec{E}=\sum_p\left(a_p\vec{m}_p+b_p\vec{n}_p\right),\ \vec{\mathrm{H}}=-i\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}}\cdot\sum_p\left(a_p\vec{m}_p+b_p\vec{n}_p\right). \tag{2}$$

Нахождение коэффициентов разложения производится в (2) следующим образом:

$$cw_p=\frac{\int_0^\pi\sin\theta\int_0^{2\pi}\left(F_rw_{pr}+F_\theta w_{p\theta}+F_\phi w_{p\phi}\right)d\phi d\theta}{\int_0^\pi\sin\theta\int_0^{2\pi}\left(\vec{w}_p\vec{w}_p^*\right)d\phi d\theta},$$

где cw_p – a_p, b_p и c_p, $\vec{w}_p$ – вектор $\vec{m}_p, \vec{n}_p$ или $\vec{l}_p$, соответственно, а $\vec{F}$ – вектор электрической или магнитной напряжённости.

Под p в данном случае понимается совокупный индекс векторной сферической гармоники.

Количество гармоник, участвующих в вычислениях, согласно [4], может быть ограничено $N = kr_0 + \max(3.6\sqrt{kr_0}, 10)$, где r_0 – радиус минимальной сферы, охватывающей источник излучения.

При переходе в дальнюю зону приведённые выше выражения векторных гармоник приобретают следующий вид:

$$\vec{m}_{mn}^{\pm} \xrightarrow[kr\to\infty]{} CE_{mn} \cdot CD_n \cdot \left\{ \hat{e}_r \quad \hat{e}_\theta \quad \hat{e}_\phi \right\} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \\ i\dfrac{d}{d\theta}\left(P_n^m(\cos\theta)\right) \end{Bmatrix} \cdot e^{\pm im\phi} \frac{e^{-ikr}}{kr},$$

$$\vec{n}_{mn}^{\pm} \xrightarrow[kr\to\infty]{} CE_{mn} \cdot CD_n \cdot \left\{ \hat{e}_r \quad \hat{e}_\theta \quad \hat{e}_\phi \right\} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -i\dfrac{d}{d\theta}\left(P_n^m(\cos\theta)\right) \\ \dfrac{m}{\sin\theta} P_n^m(\cos\theta) \end{Bmatrix} \cdot e^{\pm im\phi} \frac{e^{-ikr}}{kr}$$

где $R_q(kr) = i^{n+1}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{q(q+1)}}} N_{q+1/2}\left(\sqrt{q(q+1)}\right) e^{-ikr}$.

Вектора электрической и магнитной напряжённости в этом случае:

$$\vec{E}_{ДЗ} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(a_{mn}\vec{m}_{mnДЗ}^{\pm} + b_{mn}\vec{n}_{mnДЗ}^{\pm}\right),\ \vec{H}_{ДЗ} = -i\sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(a_{mn}\vec{m}_{mnДЗ}^{\pm} + b_{mn}\vec{n}_{mnДЗ}^{\pm}\right) \tag{3}$$

Следовательно, показано, что вектора напряжённости электрического или магнитного поля, известные на некотором сферическом сечении могут быть представлены в виде совокупности векторных сферических гармоник свободного пространства с учётом их критических сечений. Далее возможно вычисление на основании коэффициентов разложения полей как в любой заданной точке пространства (2), так и на бесконечном удалении в угловом направлении (3). Метод также может использоваться для интерполяции картины поля между точками с полученными в результате эксперимента или моделирования значениями векторов поля и для аппроксимации облучателей антенных систем оптического типа с целью использования эквивалентного излучателя в компьютерном моделировании.

Литература

1. Митрохин В.Н. Исследование переходных полей в неоднородных СВЧ-структурах с критическими сечениями // Радиотехника. 1999. № 4. С. 86-91.
2. Митрохин В.Н. Метод собственных функций в задаче мультипольного излучения электромагнитных волн // Математические методы прикладной электродинамики. Коллективная монография / Под. ред. С.Б. Раевского. М.: Радиотехника. 2007. С. 53-72.
3. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.
4. Jensen F., Frandsen A. On the number of modes in spherical wave expansions // Proc. 26th AMTA. Stone Mountain Park. Georgia. USA. 2004. P. 498-494.